L'Intuitionisme

Dmitry Mirimanoff
Professeur à l'Université de Genève

1945


```
@article{MirimanoffD:int,
   author = {Mirimanoff, Dmitry},
   title = {L'Intuitionisme},
   year = {1945},
   volume = 6,
   journal = {Alma mater; revue universitaire de la Suisse romande},
   publisher = {Editions Dixi},
   address = {Gene\`eve},
   issn = {0256-5625},
}
```


Les mathématiciens et philosophes de la Suisse romande seront sans doute heureux de pouvoir lire la belle conférence faite en 1934 à ses étudiants par l'éminent géomètre qui enseigna dans les universités de Genève, Lausanne et Fribourg. Nous remercions sa famille d'avoir consenti à cette publication. Rolin WAVRE.

La conférence de M. D. Mirimanoff précédait le colloque sur la logique mathématique organisé par l Université de Genève et les conférences qu'y fit M. Brouwer. Elle visait à initier les étudiants à ces importants sujets.

Introduction

Depuis une quinzaine d'années on parle beaucoup d'une crise des mathématiques. Je ne pense pas que cette crise, en Supposant qu'elle existe, soit aussi grave que le prétendent Les disciples de Brouwer, mais il est certain que les mathématiciens ne s'entendent pas.

Voici, d'une part, les idéalistes ou les formalistes dont le représentant le plus illustre est David Hilbert, ce *princeps mathematicorum*. Hilbert croit fermement à la solidité de l'édifice mathématique et à la rigueur du raisonnement mathématique classique et cherche à le prouver (*cf. Grundlagen der Mathematik*) à l'aide d'une méthode subtile dont M. Bernays, l'un de ses disciples, nous parlera, Sans doute, au cours de ses conférences. *

Et voici, d'autre part, les *intuitionistes* ou les *empiristes* avec Brouwer qui s'attaquent non seulement aux conquêtes les plus récentes, mais qui renversent à peu près tout ce qui à été fait depuis le XVII siècle et qui cherchent à reconstruire l'édifice mathématique sur une base nouvelle ou plutôt d'une manière nouvelle.

Que reprochent-ils aux idéalistes, quels sont les raisonnements qu'ils rejettent et que faut-il pour qu'un raisonnement mathém atique soit rigoureux au sens intuitioniste ? C'est ce que y'essaierai de vous expliquer aujourd'hui.

1 Origine de l'Intuitionisme

Voyons d'abord l'origine des théories nouvelles. On pourrait, en cherchant bien, trouver chez les Grecs des tendances ou des critiques analogues. Mais aucun lien ne rattache directement Brouwer et Weyl aux philosophes ou aux mathématiciens de l'antiquité.

C'est dans les écrits et dans l'enseignement du grand mathématicien allemand Leopold Kronecker qu'il faut voir l'origine de l'intuitionisme moderne. Kronecker était un arithméticien de génie, dont les découvertes faisaient, comme l'a dit Camille Jordan, l'envie et le désespoir des géomètres. Kronecker aimait à dire : « Die ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles Uebrige ist menschenwerk » (le bon Dieu à créé le nombre entier, tout le reste est œuvre d'homme). Pour lui, la science mathématique devait être construite à partir de la notion de nombre entier. « Si J'en ai encore le temps — dit-il un jour — je montrerai, moi-même, au monde mathématique que non seulement la géométrie, mais encore l'arithmétique peuvent montrer la voie à l'analyse, et certainement la plus rigoureuse. Si je ne puis plus le faire, ceux qui viendront après moi, le feront. et ils reconnaîtront aussi l'inexactitude de toutes ces conclusions sur lesquelles repose maintenant ce qu'on appelle analyse. » Il cherchait à arithmétiser les mathématiques au sens le plus strict du mot, c'est-à-dire à les construire à partir de la notion de nombre entier.

On dit souvent que *Weierstrass* à arithmétisé l'analyse, mais il ne l'a pas arithmétisée au sens de Kronecker : il en à chassé l'intuition géométrique. Comme l'a dit Poincaré,

« Weierstrass à réduit l'analyse à une sorte de prolongement de l'arithmétique ; on peut parcourir tous ses livres sans y trouver une figure ».

Mais cela ne suffit pas à Kronecker, il faut encore que le raisonnement mathématique soit essentiellement constructif. Un être mathématique n'existe que s'il peut être construit. Par exemple, une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre doit fournir, pour être légitime, un procédé permettant de calculer les racines avec telle approximation que l'on veut. L'existence de ces racines résulte alors de ce procédé même. Nous voyons donc dans les affirmations de Kronecker deux thèses que nous retrouverons plus tard chez Brouwer :

1) toute notion mathématique doit pouvoir être ramenée à la notion de nombre entier ;

2) Un être mathématique n'existe que s'il peut être construit.

Pour Weierstrass un nombre irrationnel possède une existence aussi réelle que n'importe quel autre objet dans le domaine de la pensée, tandis que Kronecker affirmait qu'il n'y à que des équations entre nombres entiers. Lorsque Lindemann établit la transcendance du nombre $+$, Kronecker lui dit : « À quoi peut servir votre belle recherche sur le nombre $+$? Pourquoi étudier ces problèmes, puisque les nombres irrationnels n'existent pas ? »

Aussi Kronecker mettait-il en doute les résultats dont Weierstrass était le plus fier et critiquait-il ses méthodes les plus belles. Weierstrass s'en plaignait amèrement dans ses lettres à son élève préférée Sophie Kavalevskaïa. En citant l'opinion que Kronecker avait de l'analyse moderne, Weierstrass ajoute «un tel propos, de la part d'un homme doué à un degré aussi élevé. et dont j'admire les travaux... n'est pas seulement humiliant pour ceux à qui il demande de reconnaître comme une erreur et d'abjurer ce qui a constitué le sujet de leurs pensées et de leurs efforts... mais C'est encore une invitation directe à la jeune génération d'abandonner leurs guides actuels pour se grouper autour de lui comme autour de l'apôtre d'un nouvel enseignement qui doit être fondé ».

Mais le succès des méthodes de Weierstrass et de la théorie cantorienne était si grand, les découvertes et les résultats si brillants, qu'après la mort de Kronecker en 1891, la victoire des méthodes de Weierstrass et de Cantor semblait définitive.

Ce n'était en réalité qu'une accalmie. Vers la fin du XIX° siècle, en 1897, Burali-Forti faisait connaître la première antinomie cantorienne, déjà rencontrée par Cantor lui-même deux ans plus tôt. Je crois inutile de vous en parler. Cette antinomie, qui présente une certaine analogie avec celle de Sir Bertrand Russell, provoqua une véritable inquiétude chez quelques mathématiciens et logisticiens et jeta un trouble dans leur esprit. D'autre part, en 1904, Île mathématicien allemand Zermelo publiait une démonstration célèbre d'un théorème fondamental de la théorie des ensembles, pressenti et affirmé, mais non démontré par Cantor, démonstration qui provoqua une nouvelle controverse mettant aux prises plusieurs mathématiciens français : Hadamard, Borel, Lebesque, Bair, les uns (Hadamard par exemple) acceptant, les autres critiquant le raisonnement de Zermelo et refusant d'admettre l'axiome (l'axiome du choix) sur lequel repose toute la démonstration.

Mais il ne s'agissait encore là, suivant l'expression de Weyl, que «des conquêtes aux confins les plus extrêmes des mathématiques ». Les mathématiques classiques, celles de Riemann et de Weierstrass n'étaient pas menacées. Quant aux critiques de Kronecker, elles étaient oubliées et la plupart des mathématiciens croyaient que dans l'analyse telle qu'elle à été édifiée par Weierstrass, la rigueur absolue était atteinte.

Mais quelques années plus tard, vers 1918, les empiristes et intuitionistes, Brouwer en tête, revenaient à la charge avec une vigueur nouvelle.

2 L'intuitionisme moderne

J'ai déja dit qu'on retrouve dans la critique et les affirmations de Brouwer les thèses de Kronecker, mais la critique kroneckerienne se précise et son rêve, la construction de l'analyse sur une base nouvelle, trouve un commencement de réalisation.

Kronecker affirmait, je vous le rappelle, que :

1) toute notion mathématique doit pouvoir être ramenée à la notion de nombre entier ;

2) un être mathématique n'existe que s'il peut être *construit* et il critiquait Weierstrass («ceux qui viendront après moi reconnaîtront aussi l'*inexactitude* de *toutes* les conclusions sur lesquelles repose maintenant *ce qu'on appelle analyse* »).

Or, comme Poincaré le disait en 1900, « dans l'analyse de Weierstrass (analyse d'aujourd'hui), il n'y à plus que des *syllogismes* ou des appels à l'intuition du nombre pur (la seule qui ne puisse nous tromper) ».

Mais l'intuition du nombre entier était aussi admise par Kronecker (sa première thèse).

Vous voyez que le point de départ est le même chez Kronecker et chez Weierstrass. (Ce qui les sépare c'est la façon dont ils définissent la notion d'existence.)

En critiquant Weierstrass, Kronecker critiquait donc *implicitement* la manière dont Weierstrass à édifié l'analyse à partir de la notion de nombre entier, c'est-à-dire certaines formes du raisonnement mathématique ou bien l'emploi de certaines règles de la logique. Seules les démonstrations ou définitions *constructives* (conformément à la deuxième thèse) pouvaient être tolérées. Une démonstration ou une définition qui ne fournit pas un procédé permettant de *construire* l'être mathématique devait être considérée comme illégitime.

Brouwer a donné une forme précise aux critiques et aux desiderata de Kronecker.

C'est probablement en examinant de plus près les déductions mathématiques S'harmonisant avec les thèses de Kronecker que Brouwer a été conduit à rejeter l'emploi de l'un des principes fondamentaux de la logique — le *principe du tiers exclu* («tertium non datur »), chaque fois qu'il s'agit d'un domaine mathématique infini.

Il est assez facile de comprendre pourquoi. En effet, un raisonnement mathématique dans lequel on s'appuie sur le principe du tiers exclu est nécessairement un raisonnement indirect et par conséquent *non constructif.* Prenons, par exemple, le raisonnement si souvent employé qu'on appelle la *réduction à l'absurde* . Pour établir un théorème A, on suppose que le *non* A est vrai et l'on est conduit à un résultat absurde. On en conclut que l'hypothèse non A doit être rejetée. Donc À. C'est bien, vous le voyez, le *principe du tiers exclu* qui a été mis en jeu, et chaque fois qu'on l'applique, c'est par une voie indirecte qu'on est conduit à la conclusion finale, — le raisonnement n'est pas constructif.

Lorsqu'un domaine mathématique est fini (et c'est le cas le moins intéressant), on arrive à remplacer le raisonnement indirect par un raisonnement direct (constructif) (nous en donnerons un exemple plus loin). Mais il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit d'un domaine mathématique infini. Voilà pourquoi on est conduit à renoncer, du moins partiellement, à l'emploi du principe du tiers exclu lorsqu'on admet la deuxième thèse de Kronecker.

Pour faire mieux comprendre le point de vue de Brouwer, je commencerai par citer un passage d'un livre de Pierre Boutroux qui s'harmonise avec les thèses de Brouwer.

« Le fait mathématique — dit Boutroux — est indépendant du vêtement logique sous lequel nous cherchons à le représenter ; l'idée que nous en avons est plus riche... que toute combinaison de signes par lesquels il nous est possible de l'exprimer. »

En d'autres termes, la mathématique est indépendante du langage mathématique. Et elle est aussi indépendante de la *logique* qui ne fait que symboliser une forme de la pensée mathématique, celle, d'après Brouwer, qui est relative à des domaines mathématiques *finis.* La mathématique est donc antérieure à la logique dont les lois s'en déduisent par abstraction. Mathématique d'abord, logique ensuite.

Pour Brouwer, la logique classique n'a de valeur que pour les sciences sur lesquelles un système mathématique fini peut se projeter. La pensée mathématique proprement dite, seule vraie aux yeux de Brouwer (et nous retrouvons ici l'une des thèses de Kronecker), est essentiellement *constructive.* Et si le raisonnement mathématique courant, celui qu'on trouve dans les théories mathématiques les plus connues, n'a pas toujours ce caractère, c'est qu'il à été *vicié* par la logique classique, en particulier par l'application du *principe du tiers exclu.* Aussi, comme je l'ai déjà dit, Brouwer est-il conduit à rejeter ce principe, chaque fois qu'il s'agit d'un domaine mathématique infini. Pour rendre aux mathématiques la rigueur qui leur fait défaut, il faut chercher à reconstruire l'édifice mathématique sans s'appuyer sur le principe du tiers exclu.

Sur quelle base allons-nous édifier l'analyse nouvelle ? Nous le savons : la science mathématique (et en cela Brouwer est d'accord avec Weierstrass) doit être construite à partir de la notion de nombre entier.

En partant de cette base, on peut, d'après Brouwer, arriver à une définition rigoureuse (*constructive*) de la notion d'ensemble et reconstruire l'analyse sans s'appuyer sur le principe du tiers exclu.

J'essaierai maintenant d'exposer ces thèses intuitionistes avec plus de détails.

Notion d'existence

Pour un idéaliste un être mathématique existe s'il est exempt de contradiction. Exister veut donc dire être exempt de contradiction. L'inconvénient de cette définition est qu'il est souvent très difficile de montrer que cette condition est satisfaite, mais lorsqu'elle l'est, elle est considérée comme suffisante.

Les intuitionistes sont plus exigeants. Pour eux, un être mathématique n'existe que s'il peut être construit. Ici encore nous retrouvons, comme nous l'avons dit, une thèse de Kronecker.

Voici un exemple. Je vous ai déjà parlé d'une démonstration célèbre d'un théorème de Cantor donnée par Zermelo en 1904. Il s'agissait de montrer qu'un ensemble, quelle que soit sa puissance, peut toujours être bien ordonné. Peu importe pour nous, en ce moment, ce qu'on entend exactement par *bien ordonné*. Bornons-nous à dire qu'en vertu de ce théorème, les éléments d'un ensemble peuvent toujours, du moins théoriquement, être rangés dans un certain ordre : exemples suite ω, suite ω suivie d'une autre suite ω, suite ω de suites ω, *etc.* Or la démonstration de Zermelo ne donne aucun moyen permettant d'ordonner (*de bien ordonner*) les éléments d'un ensemble donné, par exemple les points d'une droite (les nombres réels). La démonstration n'est pas constructive. Les idéalistes s'en contentent. Les intuitionistes la rejettent comme insuffisante.

Le principe du tiers exclu. — Nous avons vu que c'est pour des raisons analogues que Brouwer rejette le principe du tiers exclu, chaque fois qu'il s'agit d'un domaine mathématique infini.

Je donnerai deux exemples : dans le premier, le principe du tiers exclu est applicable au sens intuitioniste, dans le second les intuitionistes contestent sa validité ou plutôt *critiquent la manière dont on l'applique*.

Premier exemple. Considérons une suite finie de nombres entiers, par exemple les dix premiers nombres de la forme $n^{10} - 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10$). Existe-t-il dans cette suite un nombre premier à 11 ? Quelles sont les réponses possibles à cette question, avant l'examen du problème ?

Un idéaliste dira qu'il ne peut y en avoir que deux : ou bien

1) dans notre suite il existe au moins un nombre premier à 11,

ou bien 2) il n'en existe aucun.

1) est équivalent à non 2) ; 2) est équivalent à non 1).

Aucun autre cas n'est possible, le principe du tiers exclu s'applique. *Tertium non datur :* ou 1), ou 2).

I1 s'applique aussi pour un intuitioniste. En effet, on peut toujours parcourir notre suite et calculer les 10 nombres. Si l'on tombe sur un nombre premier à 11, on pourra dire qu'il *en existe* au moins un (*au sens intuitioniste*), puisque nous l'avons obtenu (construit, calculé) et si l'on reconnaît que chacun des 10 nombres est divisible par 11, nous pourrons dire qu'aucun n'est premier à 11. Dans le cas particulier de notre problème tous les nombres sont divisibles par 11 : la réponse est négative (Cas 2).

Mais supposons maintenant qu'il s'agisse d'une suite infinie. En voici un exemple classique. Considérons l'équation de Fermat

$$x^n + y^n = z^n$$

Posons-nous la question suivante : existe-t-il un nombre entier positif n supérieur à 2 et tel que cette équation admette une solution entière x, y, z ? |

Ici encore, un idéaliste ne voit que deux réponses possibles à cette question : 1) il existe au moins un n ; 2) il n'en existe aucun.

Il n'y à aucune raison d'envisager une autre éventualité.

Pour un idéaliste le principe du tiers exclu s'applique encore : 1) est équivalent à non 2) ; 2) est équivalent à non 1).

Mais pour un intuitioniste, cette classification est incomplète (lacunaire).

En effet, un intuitioniste n'a le droit d'affirmer qu'on se trouve en présence du premier cas que si l'on connaît un procédé (une méthode) permettant de calculer ou de trouver un nombre n possédant la propriété en question, puisqu'on *ne prouve l'existence d'un objet qu'en le construisant ou en le donnant.*

D'autre part, on n'a le droit d'affirmer qu'on se trouve en présence du deuxième cas que si l'on réussit à prouver par un raisonnement direct qu'aucun nombre x ne possède la propriété dont il s'agit.

Mais supposons qu'il soit impossible de trancher la question. Supposez donc qu'il soit impossible de montrer ni qu'un de ces n existe au sens intuitioniste ni qu'aucun n ne possède la propriété dont il s'agit.

Rien ne nous dit que ce troisième cas ne pourrait pas se présenter.

Nous n'avons pas la ressource de trancher la question en examinant séparément toutes les valeurs entières de », puisque la suite qu'on aurait à parcourir est infinie.

Nos deux cas ne peuvent donc plus être considérés comme exclusifs. Le principe du tiers exclu ne s'applique plus ; ou plutôt, en n'envisageant que deux cas possibles, on l'applique mal.

En voici une conséquence assez curieuse : supposez qu'on ait réussi a montrer que la proposition n° 2 (c'est le théorème de Fermat) conduit à une *contradiction*. On la rejettera. Mais pour un intuitioniste, nous n'avons pas le droit d'en conclure qu'on se trouve alors en présence du cas 1, puisque 1) n'est pas équivalent à non 2). Le cas 3) pourrait se présenter.

Vous voyez que c'est bien la notion d'existence qui est à la base de toutes ces distinctions, notions *plus étroite* que la notion classique.

Je crois inutile d'indiquer d'autres conséquences de la thèse brouwerienne, sauf une seule dont on a beaucoup parlé ces dernières années.

Vous avez vu qu'à côté des réponses *oui* ou *non* (1er et 2e cas) on est conduit à envisager un 3e cas — celui où il est impossible de dire *ni oui, ni non*, et où par conséquent le problème est *insoluble* au sens étroit.

Mais la question de savoir s'il existe des problèmes insolubles est encore un problème qui jusqu'à présent nous paraît insoluble.

Certains mathématiciens croient que le problème de Fermat est un de ces problèmes. Du reste il n'est pas nécessaire d'être intuitioniste pour croire qu'il peut exister des problèmes insolubles (même au sens *idéaliste*), contrairement à l'affirmation de Hilbert («tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse »).

Notion d'ensemble d'après Brouwer. Le continu.

Comme je vous l'ai déjà dit, Brouwer cherche à reconstruire l'édifice mathématique sans s'appuyer sur le principe du tiers exclu, en commençant par la théorie des ensembles, qui est pour lui La base des mathématiques. Mais son exposition d'une complication extrême, comparée surtout à la théorie si simple et si claire de Cantor lui-même, théorie qui, aux yeux de Brouwer, n'est qu'un jeu de l'esprit et non une science.

Je crois inutile de vous parler de la manière dont Brouwer cherche à reconstruire la théorie des ensembles. Il suffit de vous donner une idée de sa définition du continu.

Nous savons comment on définit le continu dans la théorie cantorienne : le continu arithmétique est l'ensemble de tous les nombres réels, rationnels et irrationnels. Comme le nombre irrationnel est défini par la coupure (ou par une notion analogue), la notion de coupure (ou son équivalent) est contenue implicitement dans la notion du continu.

Mais pour les intuitionistes cette définition n'a aucune valeur.

Il faut donc forger une autre définition de la notion de continu (définition constructive).

Formons un *développement décimal* quelconque. En disant quelconque je veux dire ceci : à chaque pas je choisis librement le chiffre ou la décimale suivante, par exemple après la décimale 2 que j'ai choisie j'écris une décimale quelconque (5, 7, ...).

Nous dirons, avec Brouwer, que ce développement décimal est une suite libre.

La suite libre définit, comme disent les intuitionistes, un *milieu de libre devenir* («Medium freien Werdens »).

Eh bien, pour Brouwer, ce *milieu de libre devenir* est le *continu* ; c'est donc une *suite de choix arbitraires.*

Une interprétation géométrique nous fournit alors la définition d'un point comme une suite en devenir d'intervalles emboîtés.

Je n'insiste pas sur cette définition. Je vous indiquerai seulement une conséquence qu'on en déduit et qui vous semblera bizarre.

Dans la théorie classique deux points de la droite de référence sont ou bien *confondus*, où bien *séparés.* Il n'y à pas de tertium.

Mais pour Brouwer (et pour Weyl) rien ne nous dit que deux points pourraient n'être ni confondus, ni séparés, toujours en vertu du rejet du *tertium non datur*, conséquence de la définition constructive de la notion d'existence.

Malheureusement les mots « constructif », « construire », « Construction » manquent de précision.

Vous voyez d'autre part que dans la définition du continu (et ceci s'harmonise avec le point de vue de Kronecker) nous nous sommes appuies sur la notion d'une suite de nombres entiers. Nous cherchons donc à construire nos êtres mathématiques à partir de l'ensemble des nombres entiers, à la manière de Kronecker.

Quant à la notion même de nombre entier sur lequel repose notre édifice mathématique, les intuitionistes la considèrent avec Kronecker comme donnée par *l'intuition*. C'est même là *l'intuition* première ou *fondamentale* des intuitionistes (urintuition).

En résumé voici donc les thèses principales des intuitionistes :

1) La notion de nombre entier et de la suite des nombres entiers nous est donnée par l'intuition.

2) Exister veut dire pouvoir être construit.

3) Le principe du tiers exclu n'est applicable sans restriction « qu'au sein d'un domaine mathématique fini et déterminé ».

J'ai cherché à montrer que la troisième thèse est une conséquence de la seconde. Je crois, en effet, qu'en admettant la deuxième thèse de Kronecker, on est conduit fatalement à rejeter, comme l'a fait Brouwer, l'emploi du principe du tiers exclu, lorsqu'il s'agit d'un domaine mathématique infini.

Conclusion

Que devons-nous conclure ?

Les mathématiques et en particulier l'analyse édifiées par les idéalistes courent-elles le risque de s'écrouler comme un château de cartes ? Je ne le pense pas et, au fond, les intuitionistes ne le croient pas non plus d'une manière absolue, puisqu'ils cherchent précisément à reconstruire d'une manière nouvelle une partie du moins de l'édifice mathématique. S'ils réussissent à remplacer les démonstrations idéalistes par des démonstrations constructives, nous n'aurons qu'à nous en réjouir. En 1924, par exemple, trois intuitionistes Skolem, Weyl et Brouwer ont réussi à donner une démonstration constructive du théorème fondamental de l'algèbre. C'est là un résultat extrêmement digne d'intérêt.

Un inconvénient assez grave de cette reconstruction intuitioniste est que les démonstrations nouvelles sont la plupart du temps extrêmement compliquées. Maïs à tous ceux qui doutent de la rigueur du raisonnement weierstrassien, il suffit de savoir que ces démonstrations intuitionistes existent.

Il n'en reste pas moins que les mathématiciens ne s'entendent pas. Devons-nous dire, avec Poincaré, que les hommes ne s'entendent pas parce qu'ils ne parlent pas la même langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas ? Devons-nous nous demander, avec M. Hadamard, si les cerveaux sont vraiment aussi homogènes les uns aux autres et aussi comparables les uns aux autres qu'on est tenté et qu'on a l'habitude de le croire ?

Remarquez bien qu'à côté des idéalistes comme Hilbert et des intuitionistes comme Brouwer, on peut distinguer d'autres sortes d'esprits mathématiques.

Il y à, d'une part, les *logisticiens* avec sir Bertrand Russell, qui ont imaginé un système très curieux, critiqué par Poincaré, mais adopté par quelques mathématiciens. M. Fraenkel, qui s'est beaucoup occupé des fondements des mathématiques, lui donne la préférence.

Et d'autre part, il y a aussi les *réalistes*.

Pour les réalistes, dont le représentant le plus illustre était Ch. Hermite, les êtres mathématiques ont une existence en dehors de nous. Poincaré disait en parlant d'Hermite : « Causez avec Hermite : jamais il n'évoquera une image sensible, et pourtant vous vous apercevrez bientôt que les entités les plus abstraites sont pour lui comme des êtres vivants ; il ne les voit pas, mais il sent qu'elles ne sont pas un assemblage artificiel et qu'elles ont je ne sais quel principe d'unité interne. » «Je crois, dit Hermite lui-même, que les nombres et les fonctions de l'analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de là réalité objective et que nous les rencontrons, ou les découvrons et les étudions comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes. »

Je vous citerai encore M.Juvet, professeur à l'Université de Lausanne, réaliste convaincu. « Pour nous réalistes — dit-il dans son discours inaugural — la rigueur vient des êtres mathématiques, elle n'est pas une exigence de l'esprit ; c'est pourquoi nous retournerons l'opinion de Poincaré en demandant qu'on veuille bien nous pardonner cette liberté grande : — l'existence d'un être mathématique provient de ce qu'il n'implique pas contradiction ; nous dirons bien plutôt : un être mathématique n'implique pas contradiction précisément parce qu'il est, parce qu'il existe. »

En présence de ces attitudes si différentes et à première vue incompatibles, est-il nécessaire de faire un choix ? Je ne le pense pas. Il est utile de les examiner impartialement.

Chacune d'elles apporte quelque chose de nouveau et l'absolu n'existe pas.

Mais je serais très embarrassé, je l'avoue, si l'on me demandait de préciser le sens du mot existe ou plutôt *n'existe pas* que je viens d'employer.